Modèles de graphes aléatoires réguliers & de surfaces hyperboliques aléatoires

<u>Exemple historique</u> (Erdős 1959, Graph theory & proba.)

$G = (V, E)$

girth(G) = maille(G) = systole(G) = longueur du + petit chemin fermé dans G = longueur de la + petite géodésique fermée

ici, géodésique : interdiction de rencontrer ee^{-1} pour $e \in E$.

Nb chromatique $\chi(G)$ = + petit nb de couleurs nécessaires pour colorer le graphe sans avoir 2 sommets adj. de m̂ couleur.

<u>Question</u> : $\exists L, \exists C$ tq systole $\geq L \Rightarrow \chi(G) \leq C$?

intuition : Les boules de rayon $\frac{L}{2}$ sont des arbres

$\to$ un arbre satisfait $\chi(T) = 2$

Erdős a montré que la réponse à la q° est négative :

Thm : $\exists$ des graphes (G_n) tq $\mathrm{syst}(G_n) \to \infty$
$\chi(G_n) \to \infty$

$\mathrm{ind}(G) =$ "nb d'indépendance"

$\to$ Ens. indépendant dans G = ens. I de sommets tq $x \neq y \in I \Rightarrow x \not\sim y$.

$\mathrm{ind}(G)$ = cardinal maximal d'un ensemble indépendant.

On a : prop : $\chi(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\mathrm{ind}(G)}$.

Thm : $\forall n, \forall k,$ $\exists$ graphe G_n à n sommets tq

$\mathrm{ind}(G_n) \leq n^{1-\eta}$ pour $\eta < \frac{1}{2k}$, et $\mathrm{syst}(G_n) \geq k$.
donc $\chi(G_n) \geq n^{\eta}$.

Démo : $K^{(n)}$ graphe complet à n sommets
avec proba $\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ on conserve l'arête (ij), de manière $\perp\!\!\!\perp$ $\forall (ij) \in E$

$i,j \in V$.

$p := \lfloor n^{1-\eta} \rfloor$

Lemme : $\mathbb{P}\Big(\underbrace{G_n \text{ partage au moins } n \text{ arêtes avec toutes les copies de } K^{(p)} \text{ contenues dans } K^{(n)}}_{A_{n,p}}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Corollaire : $\mathrm{ind}(G_n) \leq p$.

Démo : $\mathbb{P}(A_{n,p}^c) \leq \binom{n}{p} \binom{\frac{p(p-1)}{2}}{\frac{p(p-1)}{2} - n} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)^{\frac{p(p-1)}{2} - n}}_{\text{proba d'effacer } \frac{p(p-1)}{2} - n \text{ arêtes}}$

ensuite $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

pour $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$. $\square$

$\mathbb{E}[\text{nb de "géodésiques" fermées de longueur} \leq k]$

$= \sum_{\ell=2}^{k} \mathbb{E}[\# \text{ géod. fermées de longueur} = \ell]$

$= \sum_{\ell=2}^{k} \mathbb{E}\left[\sum_{(x_0,\dots,x_{\ell-1}) \in \{1,\dots,n\}^\ell} \mathbb{1}\{x_i \sim x_{i+1} \ \forall i = 0,\dots,\ell-1\}\right] \times \frac{1}{2\ell}$

$= \sum_{\ell=2}^{k} \sum_{\substack{x_0,\dots,x_{\ell-1} \\ x_i \neq x_j}} \underbrace{\mathbb{P}(x_i \sim x_{i+1} \ \forall\, 0 \leq i \leq \ell-1)}_{\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)^\ell} \times \frac{1}{2\ell}$

$= n(n-1)\cdots(n-\ell+1)$

$$\mathbb{E}[\cdots] \leq k\, n^{\varepsilon k} = o(n) \text{ pour } \varepsilon < \frac{1}{k}$$

$\to$ $\leq$ de Markov ; soit $t > 0$ fixé (petit)

$$\mathbb{P}(\#\{\text{géod. fermées de longueur} \leq k\} \geq tn) \leq \frac{\mathbb{E}[\cdots]}{tn} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On modifie G_n en G_n' en retirant une arête par géodésique fermée simple de longueur k, de sorte que $\mathrm{syst}(G_n') \geq k$

$\to$ On a retiré au plus tn arêtes de sorte que
si G_n partage au moins n arêtes avec toutes les copies de $K^{(p)}$ dans $K^{(n)}$, alors G_n' aussi

et $\mathrm{ind}(G_n') \geq p$.

Graphes d-réguliers aléatoires, $d \geq 3$

$N = \#V$, on $V = \{1, \ldots, N\}$ || $dN = 2\#E$

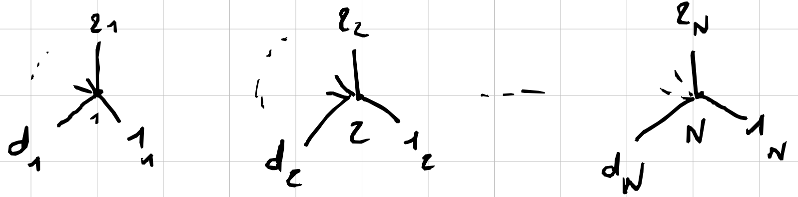
Plusieurs modèles

- $U_{N,d}$ = mesure uniforme sur tous les graphes d-réguliers à n sommets (on interdit les arêtes multiples et les auto-arêtes)

- d = pair, on tire indépendamment $\frac{d}{2}$ permutations de $\{1, \dots, N\}$ $\sigma_1, \dots \sigma_{\frac{d}{2}}$ et on met une arête entre x et $\sigma_i(x)$ $\forall\, i = 1, \dots \frac{d}{2}$ $\longrightarrow$ loi $\mathcal{G}_{N, \frac{d}{2}}$

(ex: Friedman)

- $\mathbb{P}_{N,d}$ modèle de configuration (Bollobas)



on adjoint à chaque sommet d demi-arêtes et on fait des "appariements parfaits" (perfect matching) entre les demi-arêtes.

On prend $\mathbb{P}_{N,d}$ la proba unif sur ces perfect matchings

$$\#\{\text{perfect matching}\} : (dN-1)(dN-3)(dN-5)\cdots 1$$
$$= (dN-1)!!$$

<u>NB:</u> $\mathbb{P}_{N,d}\Big|_{\substack{\text{interdict}^\circ \text{ boucles} \\ \text{\& arêtes multiples}}} = U_{N,d}$

$$\mathcal{G}_{N,\frac{d}{2}} \underset{N\to\infty}{\overset{\sim}{\text{contiguïté}}} \mathcal{P}_{N,d}$$

Calcul pour $\mathcal{G}_{N,\frac{d}{2}}$

<u>Lemme:</u> $\mathbb{P}(G_N \text{ non connexe}) = O\left(N^{1-\frac{d}{2}}\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

<u>Démo:</u> dénombrement.

$$\sum_{k=1}^{N/2} \mathbb{P}\big(\exists \text{ partition } \{1,\dots,N\} = A \sqcup B,\ |A| = k,\ |B| = N-k \text{ sans arête entre } A \text{ et } B\big)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N/2} \binom{N}{k} \Bigg(\underbrace{\frac{k!\,(N-k)!}{N!}}_{\frac{\#\text{perm qui préservent } A \times \#\text{perm qui préservent } B}{\#\text{perm}}} \Bigg)^{d/2}$$

$$= \sum_{k=1}^{N/2} \binom{N}{k}^{1-\frac{d}{2}}, \text{ et à } k \text{ fixé } \binom{N}{k} \sim \frac{N^k}{k!}$$

$$= O\left(N^{1-\frac{d}{2}}\right)$$ (k=1 donne la contribution dominante) □

prop: $\exists \eta > 0$ tq

$$\mathbb{P}\Big(\exists \text{ partition } \{1, \dots, N\} = A \sqcup B \text{ tq } |A| \leq \tfrac{N}{2} \text{ et le nb d'arêtes entre } A \text{ et } B \text{ est } \leq \eta |A|\Big) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Def: cste de Cheeger (ou cste isopérimétrique)

$$h(G) = \min_{V = A \sqcup B} \frac{E(A,B)}{\min(|A|,|B|)}$$ où $E(A,B) = \#\{\text{arêtes entre } A \text{ et } B\}$

ex: $h(G) = 0 \iff G$ pas connexe

$h(G)$ grand $\longleftrightarrow$ G "très connexe".

la prop préc. peut se traduire par $\mathbb{P}(h(G_N) \geq \eta) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$.

Bollobas 1988: $i^*(d)$ = le meilleur η possible

$$i(d) = \limsup_{N \to \infty} \sup_{\substack{\text{graphes d-rég} \\ \text{à } N \text{ sommets}}} h(G_N) = \sup\{\gamma > 0 \text{ tq } h(G) > \gamma \text{ pour une infinité de graphes d-réguliers}\}$$

$\rightarrow i^*(d) \leq i(d)$

Bollobas : $i^*(d) \geqslant \frac{d}{2} - (\log 2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{d}$

$$i^*(3) \geqslant \frac{2}{11}$$

Dans le cours, d sera fixé (mais on peut considérer d variable en général)

Borne sup sur $i(d)$:

soit $\mathbb{T}_d$ l'arbre infini d-régulier

$$h(\mathbb{T}_d) = d-2 \quad \text{(exercice)}$$

On peut mq $i(d) \leq h(\mathbb{T}_d)$ (borne élémentaire)

Thm (Bollobas) : à N fixé,

$$\sup_{\substack{G_N \ d\text{-rég} \\ \text{à } N \text{ sommets}}} h(G_N) \leq \frac{d}{2} \frac{N+1}{N-1} \implies i(d) \leq \frac{d}{2}.$$

Démo : $\forall G_N$ d-rég à N sommet, on va exhiber $V = A \sqcup B$ tq $|A| = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ et $\frac{E(A,B)}{|A|} \leq \frac{d}{2} \frac{N+1}{N-1}$

On choisit A au hasard parmi tous les sous-ensembles à $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ éléments.

On calcule $\mathbb{E}[\ E(A,B)] = \sum_{x \sim y} \mathbb{P}(x \in A, y \in B)$

$$= dN - \frac{\binom{N-2}{\lfloor \frac{N}{2} - 1 \rfloor}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}} = \frac{d}{N-1} \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$$

donc $\exists$ une partition $A \sqcup B$ tq $E(A,B) \leq \frac{d}{N-1} |A| \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$

$$\leq \frac{d}{N-1} (N+1) |A| \quad \square$$

Trou spectral du laplacien

$G = (V,E)$, $f : V \to \mathbb{C}$, $\Delta f : V \to \mathbb{C}$

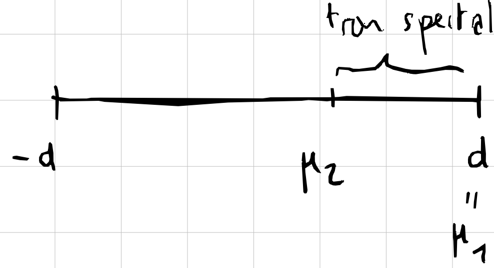
tq $\Delta f(x) = \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)) = \left(\sum_{y \sim x} f(y) \right) - d f(x)$

si G régulier

$= Af(x) - d f(x)$

$= (A - dI) f(x)$, A opérateur d'adjacence

Sp(A) :



"vp triviale", pour $f = \text{cste}$

Sp(Δ) :

$\boxed{d - \mu_2 = \text{tron spectral}}$

Rmq : G connexe $\Longleftrightarrow$ d est simple

$\Longleftrightarrow d - \mu_2 > 0$

Inég. de Cheeger pour les graphes d-réguliers :

$$\frac{h^2(G)}{2d} \le d - \mu_2 \le 2h(G)$$

Diaconis & Stroock 1991

facile

équiv. à $\le$ de Cheeger (70's) et de Buser (80's)

Preuve de l'inég. facile :

Caractérisat° variationnelle des valeurs propres

$$d - \mu_2 = \inf_{\substack{f : V \to \mathbb{C} \\ \sum_x f(x) = 0}} \frac{-\langle \Delta f, f \rangle}{\|f\|^2}$$ quotient de Rayleigh

signifie que $f \perp$ au vecteur propre trivial

$$= \inf_{\substack{f : V \to \mathbb{C} \\ \sum f(x) = 0}} \frac{\frac{1}{2} \sum_{x \sim y} |f(y) - f(x)|^2}{\|f\|^2}$$ ← énergie de Dirichlet

soit $A \sqcup B$ partition $f = \frac{\mathbb{1}_A}{|A|} - \frac{\mathbb{1}_B}{|B|}$

→ on a bien $\sum_x f(x) = 0$

$$d - \mu_2 \leq - \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\|f\|^2} \leq 2 \frac{E(A, B)}{\min(|A|, |B|)}$$

vrai $\forall A \sqcup B$

Trou spectral des graphes réguliers

Inég. de Alon – Boppana : $\mu_2 \geq 2\sqrt{d-1} - O\left(\frac{1}{(\log N)}\right)$
1991

+ version Friedman : $O\left(\frac{1}{(\log N)^2}\right)$
2003

analogue pour surf. hyperb : Huber 1974 $\lambda_1 \leq \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{\log(g)^2}\right)$

$\Longleftarrow \quad d-\mu_2 \leq d - 2\sqrt{d-1} + O\left(\frac{1}{(\log N)^2}\right)$

<u>Déf</u> : Graphes de Ramanujan : $|\mu_j| \leq 2\sqrt{d-1} \quad \forall j \geq 2$

Existence d'une infinité de tels graphes connue pour $d = p+1$ avec p premier
(construction arithmétique) – Margulis, Lubotzky – Phillips – Sarnak 1988)

Thm (Marcus – Spielman – Srivastava) : $\forall d$, $\exists$ une infinité de graphes de Ramanujan bipartis

Trou spectral des graphes réguliers aléatoires

Thm: $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(|\mu_j| \leq 2\sqrt{d-1} + \varepsilon\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$
$\forall j = 2 \dots N$

$\rightsquigarrow$ un graphe régulier aléatoire est "presque Ramanujan"

Friedman 2008) méthode des traces
Bordenave 2017)

Huang-Yao 2021) techniques de matrices aléatoires

Chen-Garza Vargas-Tropp-Van Handel 2024) cv forte de spectres

Thm (Anantharaman-Monk) surfaces hyperboliques compactes orientables de genre g (Aire $= 4\pi(g-1)$)

$\mathbb{P}^{WP}$ = mesure de Weil-Petersson = mesure de Lebesgue sur $\mathcal{M}_g$.

$\forall \varepsilon$, $\mathbb{P}\left(\lambda_1 \geq \frac{1}{4} - \varepsilon\right) \xrightarrow[g\to\infty]{} 1$

Corollaire: $\exists$ une suite de surfaces hyp. $\overset{S_g}{\vee}$ de genre $g \to \infty$ tq $\lambda_1(S_g) \geq \frac{1}{4} - o(1)$

Question ouverte : existe-t-il $(S_g)_{g \geq 1}$, $g \to \infty$

tq $\lambda_1(S_g) \geq \frac{1}{4}$? Conjecture de Selberg

→ c'est vérifié pour des "revêtements de congruence"